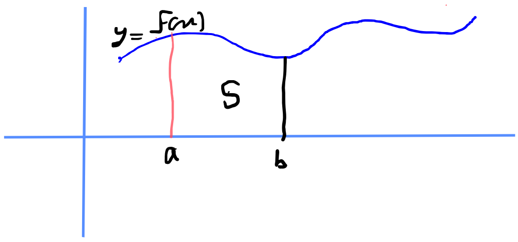
التكامل المحدد

(f, P) $\sum_{k=1}^{n} |f(x)\, \Delta x_k|$

$\lim_{P \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\, \Delta x_k = I$

$I = \int_a^b f(x)\,dx$ $\qquad \int_a^b f(x)\,dx$



$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

özellikler:

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ $\quad = \int_2^2 x\,dx = 0 \quad \frac{x^2}{2}\Big|_2^2 = \frac{4}{2} - \frac{4}{2} = 0$

2) $\frac{d}{dx}\left[\int_a^b f(x)\,dx\right] = 0$ $\quad \frac{d}{dx}\left[\int_0^1 x\,dx\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}\right] = 0$

3) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$ $\quad = \int_1^2 x\,dx = -\int_2^1 x\,dx$

4) $\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ $\quad \int_1^3 3x\,dx = 3\int_1^3 x\,dx$

5) $\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ $\quad \int_0^{\pi} \sin x + \cos x\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \int_0^{\pi} \cos x\,dx$

6) $a < c < b \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ $\quad \int_1^3 x\,dx = \int_1^2 x\,dx + \int_2^3 x\,dx$

7) $\int_a^b u\,dv = u.v\Big|_a^b - \int_a^b v.du$ $\quad \int_1^e \ln x\,dx = x.\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x}{x}\,dx$

8) $\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(x)\,dx = g'(x).f(g(x)) - h'(x).f(h(x))$

$$\frac{d}{dx}\int_{x^2}^{x^3+1} x^2+2x\,dx = 3x^2.\left[(x^3+1)^2 + 2(x^3+1)\right] - 2x\left[x^4 + 2x^2\right]$$

örnekler:

1) $\int_0^{\pi/3} \frac{\tan x}{\sqrt{\sec x}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sin x}{\cancel{\cos x}}}{\frac{1}{\cancel{(\cos x)^{\frac{1}{2}}}}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{(\cos x)^{\frac{1}{2}}}\,dx$

$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos x)^{-\frac{1}{2}}\,.\sin x\,dx$

$\cos x = t \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = t = b$

$\frac{1}{2} = t =$

$-\sin x\,dx = dt \quad x = 0 \Rightarrow 1 = t = a$

$\int_1^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}\,dt \Rightarrow -\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{-\frac{1}{2}}\,dt = -2\,t^{\frac{1}{2}}\Big|_{\frac{1}{2}}^1$

$-2 + 2\sqrt{\frac{1}{2}}$

2) $\int_{-1}^{1} |x|[\![x]\!]\, dx = \int_{-1}^{0} -x(-1)\, dx + \int_{0}^{1} x(0)\, dx = \int_{-1}^{0} x\, dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} = 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

3) $\int_{-1}^{1} x \cdot \mathrm{sgn}(x)\, dx = \int_{-1}^{0} x(-1)\, dx + \int_{0}^{1} x(1)\, dx = -\int_{-1}^{0} x\, dx + \int_{0}^{1} x\, dx$

4) $\int_{-1}^{3} \frac{|x^2-1| \cdot [\![x]\!]}{\mathrm{sgn}(x+3)}\, dx = \int_{-1}^{0} \frac{-(x^2-1)(-1)}{1} dx + \int_{0}^{1} 0 + \int_{1}^{2} \frac{(x^2-1)}{1} dx + \int_{2}^{3} \frac{(x^2-1)\,2}{1} dx$

$\int_{-1}^{0} x^2-1\, dx + \int_{1}^{2} x^2-1\, dx + 2\int_{2}^{3} (x^2-1)\, dx$

$\frac{x^3}{3} - x\Big|_{-1}^{0} + \frac{x^3}{3} - x\Big|_{1}^{2} + 2\left[\frac{x^3}{3} - x\Big|_{2}^{3}\right]$

$0 \cancel{+\frac{1}{3}} \cancel{-1} + \cancel{\frac{8}{3}} - \cancel{2} - \cancel{\frac{1}{3}} + \cancel{1} + 1\cancel{8} - \cancel{6} - \frac{\cancel{16}}{3} + \cancel{4} = 14 - \frac{8}{3} = \frac{34}{3}$

5) $\int_{1}^{4} |x^2-4|\, dx$

	-2	$1 \quad 2$	4
x^2-4	$+$	$-$	$+$
$\lvert x^2-4\rvert$	x^2-4	$-(x^2-4)$	x^2-4

$-\int_{1}^{2} (x^2-4)\, dx + \int_{2}^{4} (x^2-4)\, dx$

$-\frac{x^3}{3} + 4x\Big|_{1}^{2} + \frac{x^3}{3} - 4x\Big|_{2}^{4} = -\frac{19}{3}$

6) $\int_{-2}^{3} |x^2 - x - 2|\, dx$ $\quad (x-2)(x+1)$

	$-2 \quad -1$	2	3
x^2-x-2	$+$	$-$	$+$
$\lvert x^2-x-2\rvert$	x^2-x-2	$-x^2+x+2$	x^2-x-2

$\int_{-2}^{-1} x^2-x-2\, dx + \int_{-1}^{2} -x^2+x+2\, dx$

$+ \int_{2}^{3} x^2-x-2\, dx$

$\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\Big|_{-2}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\Big|_{-1}^{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\Big|_{2}^{3}\right.$

7) $\int_{-2}^{3} \mathrm{sgn}(x+1)\, dx$

	$-2 \quad -1$	3
$x+1$	$-$	$+$
$\mathrm{sgn}(x+1)$	-1	1

$-\int_{-2}^{-1} dx + \int_{-1}^{3} dx$

$-x\Big|_{-2}^{-1} + x\Big|_{-1}^{3}$

8) $\int_{-1}^{2} |x| \cdot \mathrm{sgn}(x-1)\, dx = \int_{-1}^{0} -x(-1)\, dx + \int_{0}^{1} x \cdot (-1) + \int_{1}^{2} x(1)$

$\int_{-1}^{0} x\, dx - \int_{0}^{1} x\, dx + \int_{1}^{2} x$

$\frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{0} - \frac{x^2}{2}\Big|_{0}^{1} + \frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{2}$

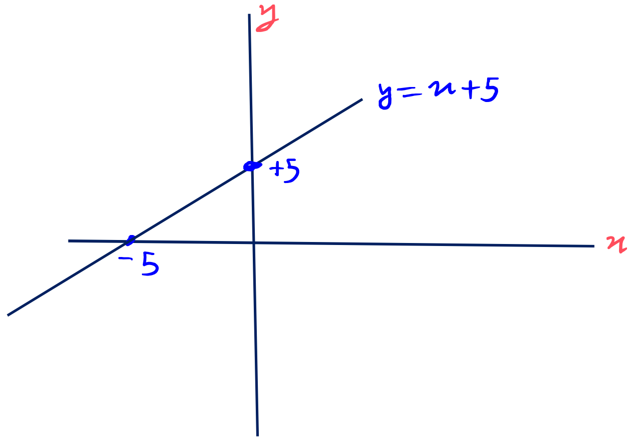
grafik çizme

1. denklem:

$y = x + 5$

$y = 0 \Rightarrow x = -5$

$x = 0 \Rightarrow y = 5$



parabol: $y = ax^2 + bx + c$

① $a > 0$ $\cup$
$a < 0$ $\cap$

② $x = 0$ için $y = ?$
$y = 0$ için $x = ?$

③ $T(r, k)$ $\Rightarrow r = \dfrac{-b}{2a}$, $k = f(r)$

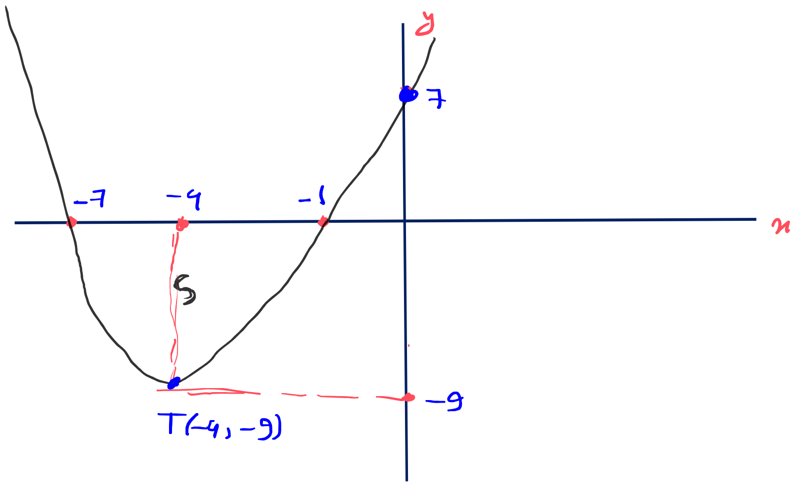
$y = x^2 + 8x + 7$

1) $a = 1 > 0$ $\cup$

2) $x = 0$ için $y = 7$
$y = 0$ için $0 = (x+7)(x+1)$
$x = -1, -7$

3) $r = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-8}{2} = -4$, $f(-4) = 16 - 32 + 7 = -9$

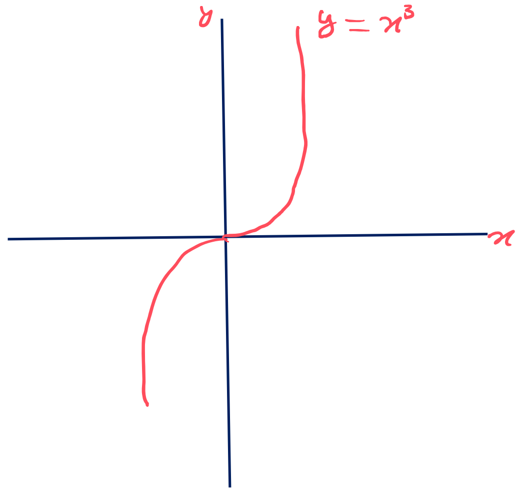
$T(-4, -9)$



3. denklem

$y = x^3$

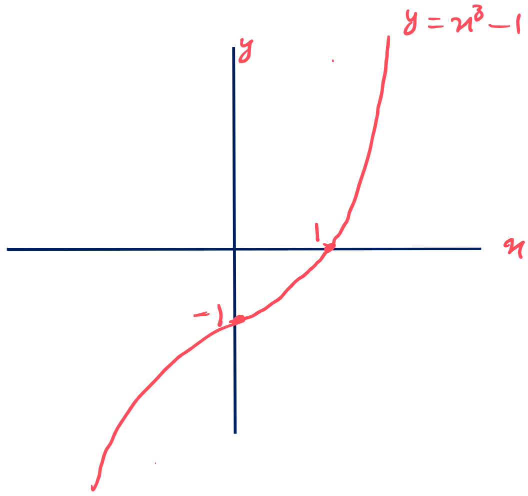
$y = 0 \Rightarrow x = 0$



$y = x^3 - 1$

$y = 0 \Rightarrow x = 1$

$x = 0 \Rightarrow y = -1$

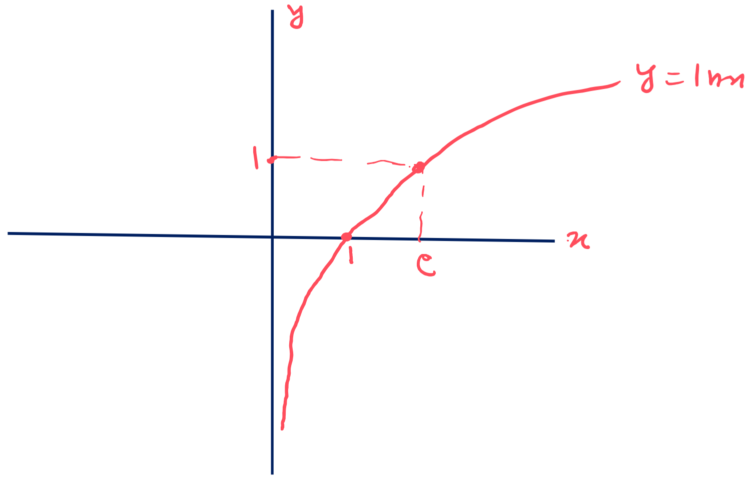


$y = \ln x$

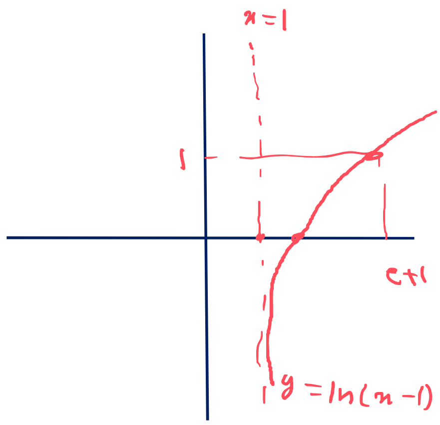
1) $x > 0$

2) $y = 0$ için $x = 1$

3) $y = 1$ için $x = e$



$e \simeq 2{,}7$



$y = \ln(x-1)$

1) $x - 1 > 0$

$x > 1 \rightarrow$ Asimptot Dikey

2) $y = 0 \Rightarrow$ için $e^0 = x - 1$

$1 = x - 1 \Rightarrow x = 2$

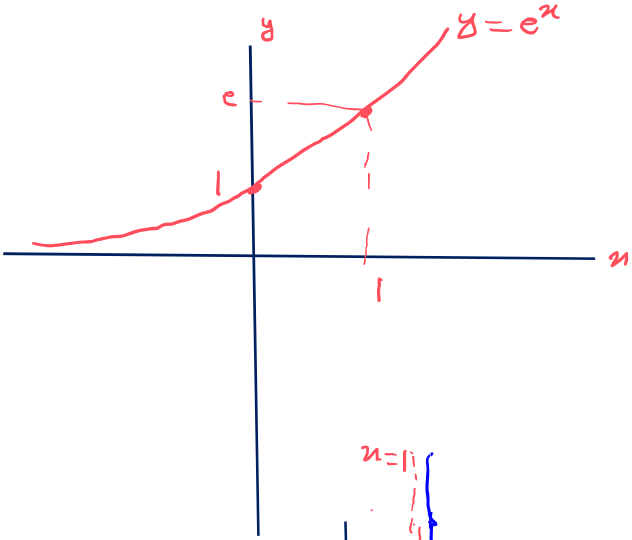
3) $y = 1 \Rightarrow e = x - 1 \Rightarrow x = e + 1$

$y = e^x$

$\ln y = x \qquad y > 0$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$

$x = 1 \Rightarrow y = e$



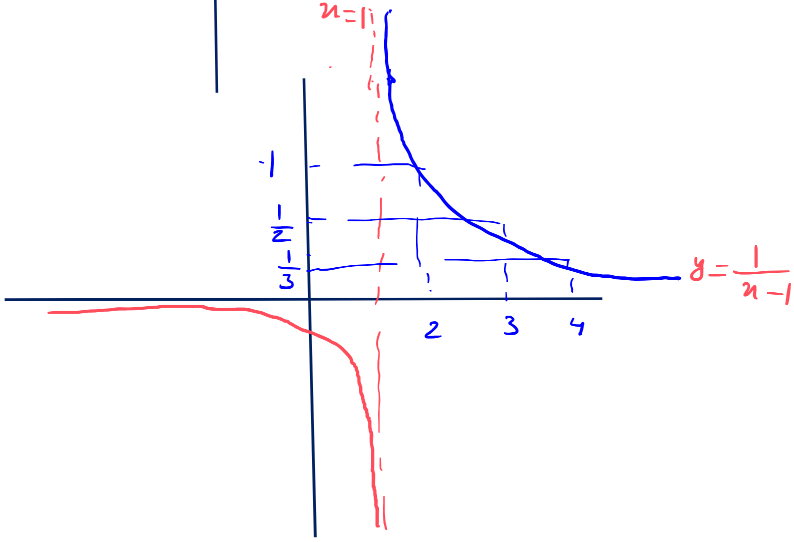
$y = \dfrac{1}{x-1} \qquad x - 1 \neq 0$

$x \neq 1$

$x = 2 \longrightarrow y = 1$

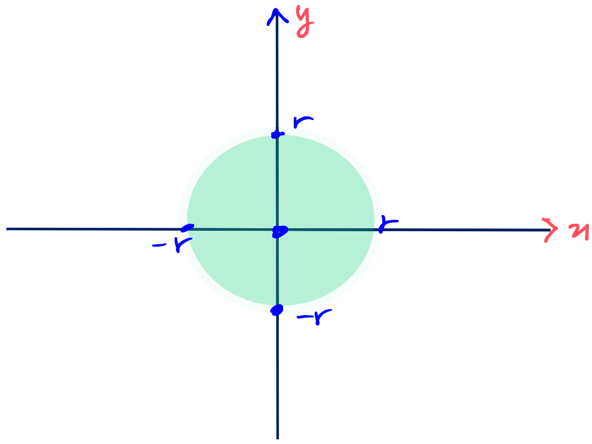
$x = 3 \longrightarrow y = \frac{1}{2}$

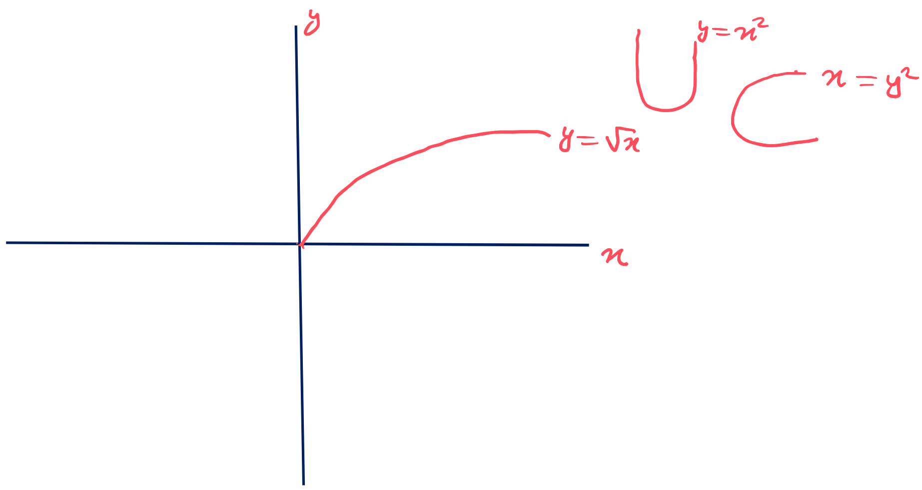
$x = 4 \longrightarrow y = \frac{1}{3}$



$x^2 + y^2 = r^2$

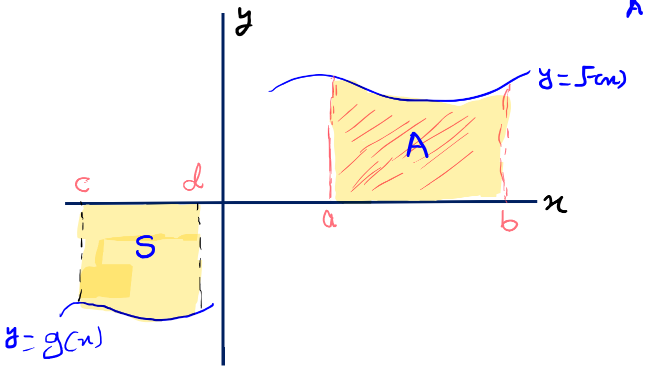
$(0,0)$



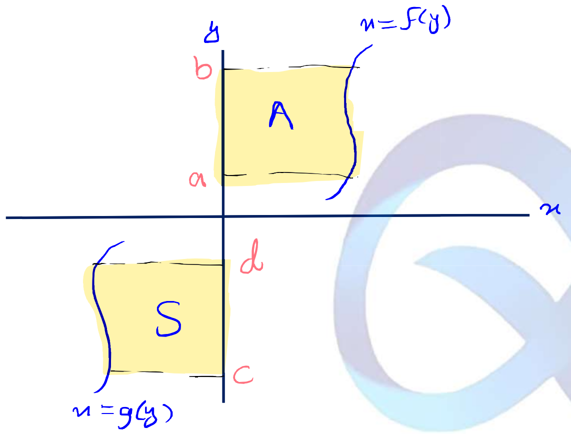


integral Uygulamaları

1) Alan Hesabı:

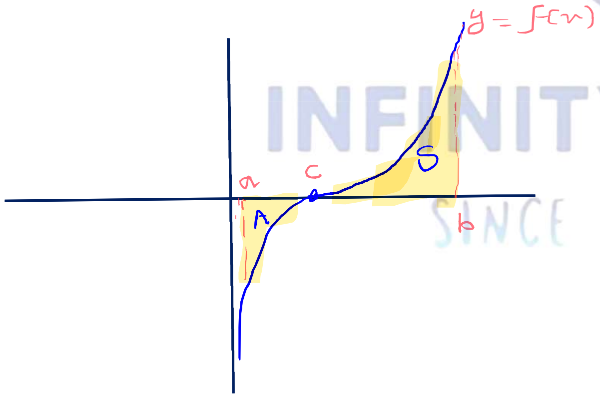


$$A=\int_a^b f(x)\,dx \quad S=-\int_c^d g(x)\,dx \quad \Big\}\ A = br^2$$



$$A=\int_a^b f(y)\,dy$$

$$S=-\int_c^d g(y)\,dy$$



$$\text{Tüm Alan} = A+S = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

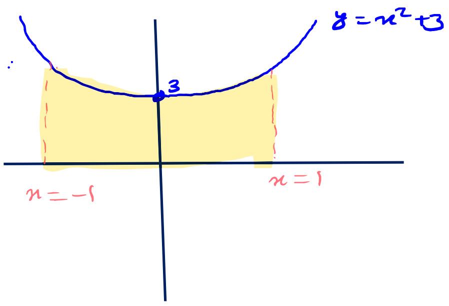
$$A+S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

Örnek. $y = x^2 + 3$ parabolu $x = -1$ ve $x = 1$ doğruları ve ox-ekseni ile sınırlanan bölgenin alanı;

$y = x^2+3$

$x=0 \Rightarrow y=3$

$y=0 \Rightarrow x=\varnothing$



$$\Rightarrow A=\int_{-1}^{1} x^2+3\,dx$$

$$=2\int_0^1 x^2+3\,dx$$

$$\Rightarrow = 2\left[\frac{x^3}{3}+3x\Big|_0^1\right] = 2\left[\frac{1}{3}+3\right] = \frac{2\cdot 10}{3} = \frac{20}{3}\ br^2$$

Örnek. $y = \ln x$ eğrisi $x = 3$ doğrusu ve ox-ekseni ile sınırlanan bölgenin alanı

$y = \ln x$

① $x > 0$

② $y = 0 \Rightarrow x = ?$

$0 = \ln_e x$

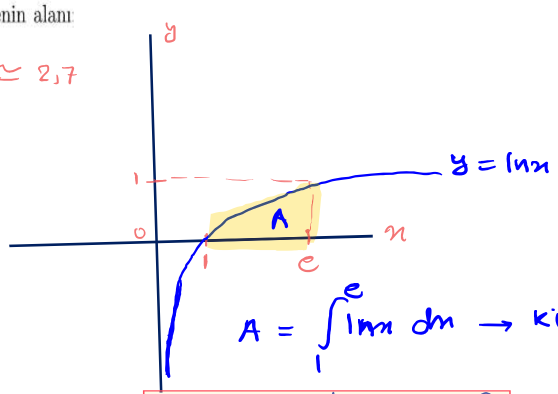
$x = 1$

③ $y = 1 \Rightarrow x = ?$

$1 = \ln_e x$

$e = x$

$e \simeq 2,7$



$A = \int_1^e \ln x \, dx \rightarrow$ kısmi integral

$\boxed{\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C}$

$A = x \ln x - x \Big|_1^e = e \ln e - e - 0 + 1$
$= e - e + 1$
$= 1 \text{ br}^2$

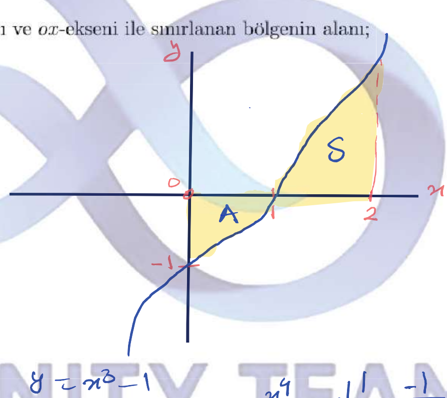
Örnek. $y = x^3 - 1$ eğrisi $x = 0$ ve $x = 2$ doğruları ve ox-ekseni ile sınırlanan bölgenin alanı;

$y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 - 1$

$x^3 = 1$

$x = 1$

$x = 0 \Rightarrow y = -1$



$A = -\int_0^1 x^3 - 1 \, dx$

$S = \int_1^2 x^3 - 1 \, dx$

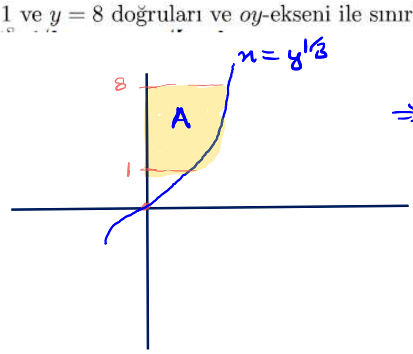
$-\frac{x^4}{4} + x \Big|_0^1 = \frac{-1}{4} + 1 = \frac{3}{4} \text{ br}^2$

$\frac{x^4}{4} - x \Big|_1^2 = \left(\frac{16}{4} - 2\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right)$
$= 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

$\frac{11}{4} + \frac{3}{4} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \text{ br}^2$

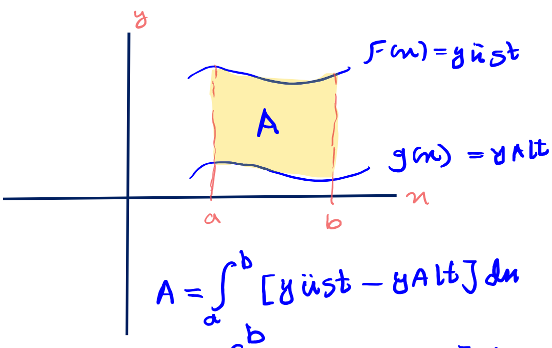
Örnek. $y = x^3$ eğrisi $y = 1$ ve $y = 8$ doğruları ve oy-ekseni ile sınırlanan bölgenin alanı;

$x = y^{1/3}$



$\Rightarrow A = \int_1^8 y^{1/3} \, dy$

$\frac{3}{4} \cdot y^{4/3} \Big|_1^8 = 12 - \frac{3}{4} = \frac{45}{4} \text{ br}^2$



$A = \int_a^b [y \text{üst} - y \text{alt}] \, dx$

$A = \int_a^b [F(x) - g(x)] \, dx$

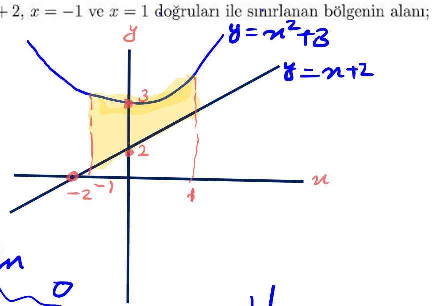
Örnek. $y = x^2 + 3$ parabolu ve $y = x + 2$, $x = -1$ ve $x = 1$ doğruları ile sınırlanan bölgenin alanı;

1) $y = 0 \Rightarrow x = \emptyset$

$x = 0 \Rightarrow y = 3$

2) $y = 0 \Rightarrow x = -2$

$x = 0 \Rightarrow y = 2$



$\int_{-1}^1 x^2 + 3 - x - 2 \, dx$

$\int_{-1}^1 x^2 + 1 \, dx - \int_{-1}^1 x \, dx$ 0

$2 \int_0^1 x^2 + 1 \, dx$

$\frac{x^3}{3} + x \Big|_0^1$

$\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3}$

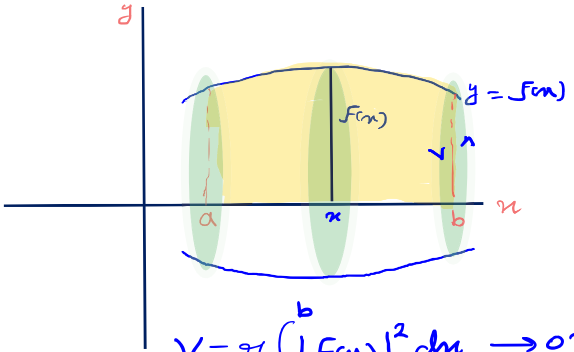
$2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \text{ br}^2$

2) Hacim Hesabı:

1) Disk yöntemi:

$y = f(x) \Rightarrow \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{Disk yöntemi}} \rightarrow ox$

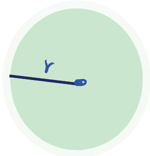
$x = f(y) \Rightarrow \underbrace{\int_c^d f(y)\,dy}_{\text{Disk yöntemi}} \rightarrow oy$



$V = \pi \int_a^b |f(x)|^2\,dx \rightarrow ox$

$V = \pi \int_c^d |f(y)|^2\,dy \rightarrow oy$

$V = br^3$



$\Rightarrow A = \pi \cdot r^2$

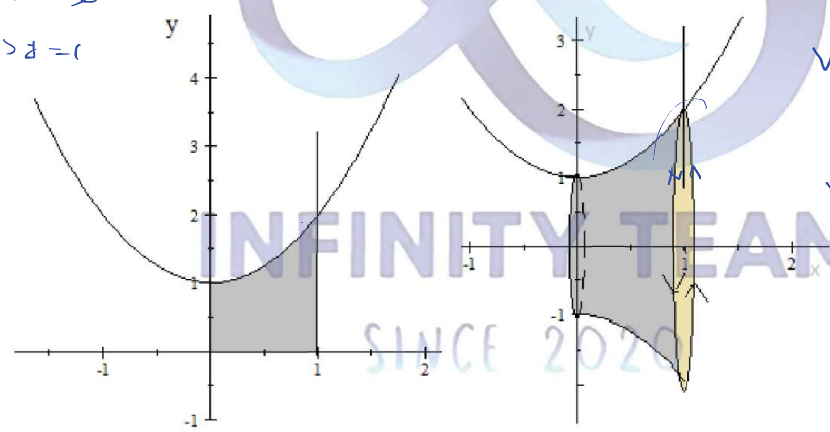
$\underbrace{\int A\,dA}_{V} = \pi \int r^2\,dr$

$V = \pi \int_a^b |f(x)|^2\,dx$

Örnek. $y = x^2 + 1$ parabolu $x = 0$ ve $x = 1$ doğruları ve ox-ekseni ile sınırlanan bölgenin $x$ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi ?

$y = 0 \Rightarrow x = \varnothing$

$x = 0 \Rightarrow y = 1$



$V = \pi \int_0^1 (x^2+1)^2\,dx$

$V = \int_0^1 x^4 + 2x^2 + 1\,dx$

$V = \frac{x^5}{5} + \frac{2}{3}x^3 + x \Big|_0^1$

$\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1 = \frac{28}{15}$

$V = \frac{\pi \cdot 28}{15}\ br^3$

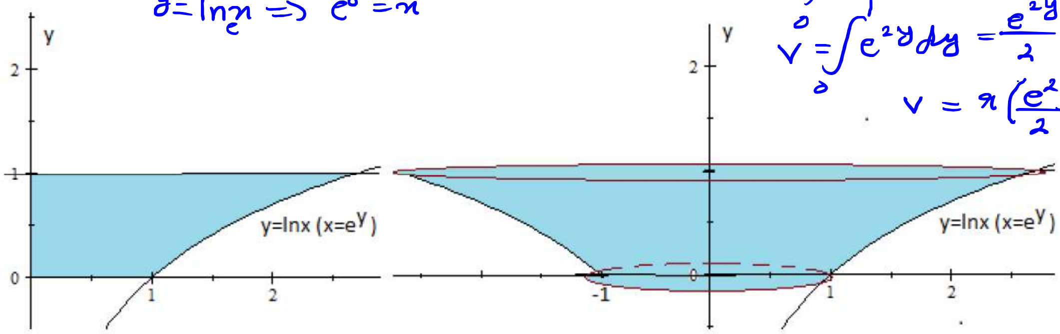
Örnek. $y = \ln x$ eğrisi $y = 0$ ve $y = 1$ doğruları ve oy-ekseni ile sınırlanan bölgenin y−ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi ?:

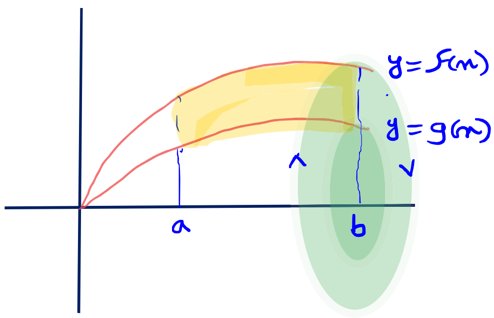
$y = \ln x \Rightarrow e^y = x$

$V = \pi \int_0^1 |e^y|^2\,dy$

$V = \int_0^1 e^{2y}\,dy = \frac{e^{2y}}{2}\Big|_0^1$

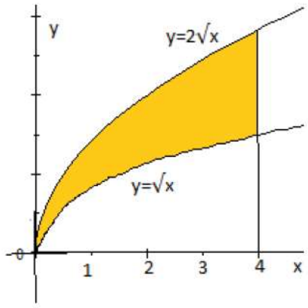
$V = \pi \left(\frac{e^2 - 1}{2}\right) br^3$

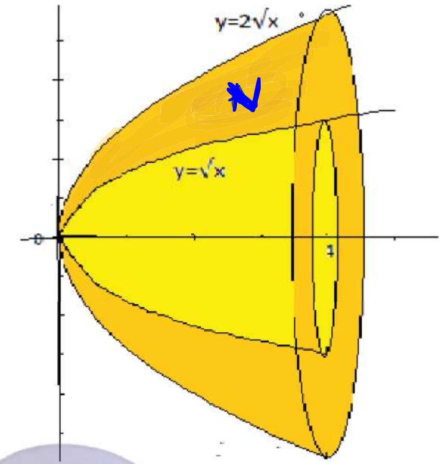




$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2\,dx = \pi \int_a^b \left([f(x)]^2 - [g(x)]^2\right) dx$$

Örnek: $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$eğrileri ve $x=4$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin x-ekseni etrafında döndürülmesiyle meydana gelen cismin hacmi;





$$V=\pi\int_0^4 (2\sqrt{x})^2-(\sqrt{x})^2\,dx$$
$$=\pi\int_0^4 3x\,dx$$
$$=\frac{3\pi x^2}{2}\Big|_0^4$$
$$=24\pi \text{ br}^3$$

kabuk yöntemi;

$y=f(x) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$

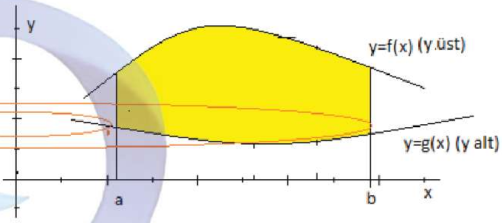
$ox \longrightarrow y$-ekseni

kabuk yöntemi

$x=f(y) \longrightarrow \int_c^d f(y)\,dy$

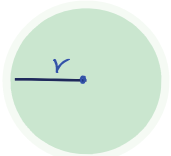
$oy \longrightarrow x$-ekseni

kabuk yöntemi



Bu durumda meydana gelen dönel cismin hacmi

$$V=2\pi\int_a^b |x|\,[f(x)-g(x)]\,dx$$

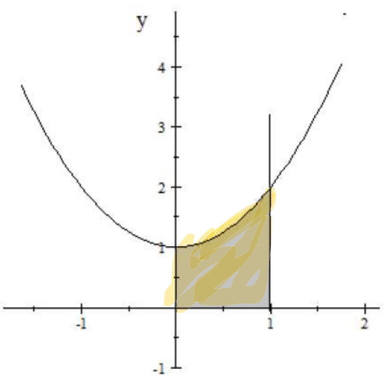


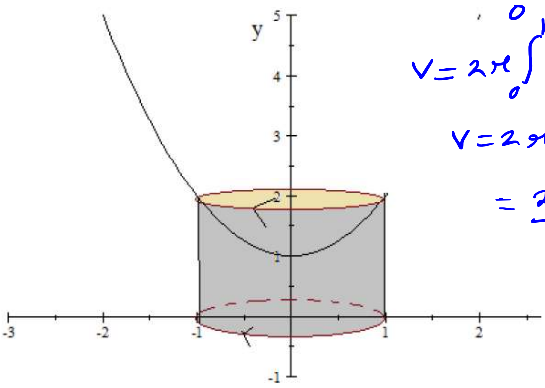
$Ç=2\pi.r$

$V=2\pi\int r\,dr$

$V=2\pi\int_a^b |x|\,[f(x)-g(x)]\,dx$

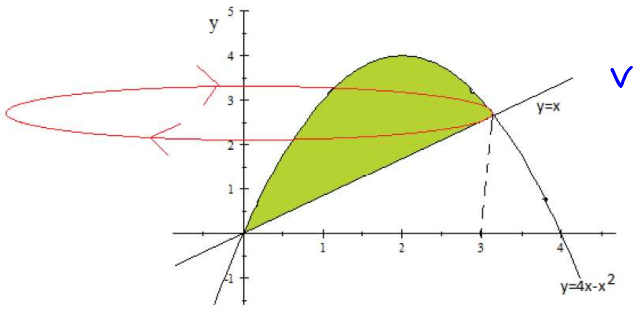
Örnek: $y=x^2+1$ parabolu $x=0$ ve $x=1$ doğruları ve ox-ekseni ile sınırlanan bölgenin $y-$ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi ?;





$$V=2\pi\int_0^1 |x|\cdot[x^2+1-0]\,dx$$
$$V=2\pi\int_0^1 x^3+x\,dx$$
$$V=2\pi\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right]$$
$$=\frac{2\pi.3}{4}$$
$$V=\frac{3\pi}{2}\text{ br}^3$$

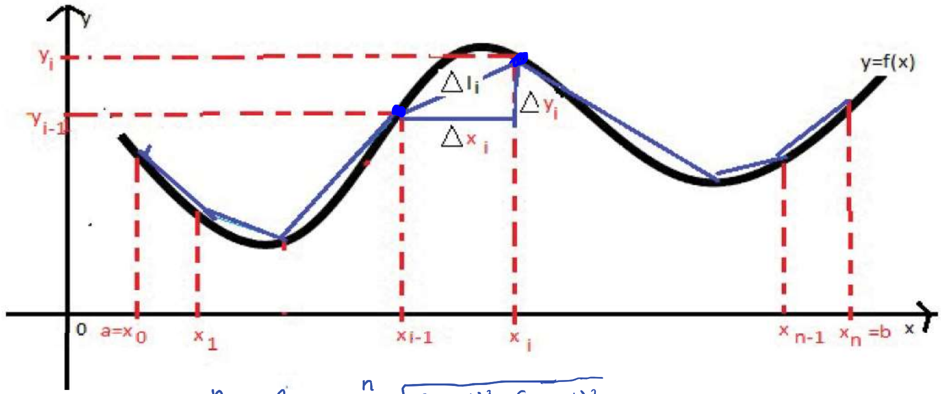
Örnek. $y=4x-x^2$ parabolu ve $y=x$ doğrusu ile sınırlanan bölgenin $y-$ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel cismin hacmi ?;



$$V=2\pi\int_0^3 x\cdot(4x-x^2-x)\,dx$$
$$V=2\pi\int_0^3 3x^2-x^3\,dx$$
$$x^3-\frac{x^4}{4}\Big|_0^3=27-\frac{81}{4}$$
$$=54-\frac{81}{2}$$
$$V=\frac{27\pi}{2}\cdot\text{br}^3$$

integral Uygulamaları

3) Eğri Uzunluğu Hesabı:



$$l \simeq \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}$$

$$l = \lim_{p \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2+(\Delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i$$

y'

$p \to 0 \Rightarrow \Delta x \to 0$

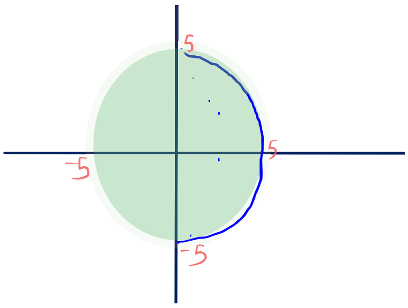
$ox \longrightarrow$ $\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx}$ $\quad a \leq x \leq b$

$oy \longrightarrow$ $\boxed{l = \int_c^d \sqrt{1+(f'(y))^2}\, dy}$ $\quad c \leq y \leq d$

$x = x(t)$
$y = y(t)$ $\quad \boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\, dt}$ $\quad t_1 \leq t \leq t_2$

Örnek: 5 br yarıçaplı $x^2+y^2=25$ çemberinin çevre uzunluğunu hesaplayalım.

$$l = \int_a^b \sqrt{1+(x')^2}\, dy$$



$x^2 = 25 - y^2$

$x = \pm\sqrt{25-y^2}$

$x' = \dfrac{-\cancel{2}y}{\cancel{2}\sqrt{25-y^2}}$

$x' = \dfrac{-y}{\sqrt{25-y^2}}$

$(x')^2 = \dfrac{y^2}{25-y^2}$

$\sqrt{(x')^2+1} = \dfrac{\cancel{y^2}+25-\cancel{y^2}}{25-y^2}$

$= \int \dfrac{5}{\sqrt{25-y^2}}\, dy$

$5 . \arcsin\left(\dfrac{y}{5}\right)\Big|_{-5}^{5}$

$5 . \left\{\arcsin 1 - \arcsin(-1)\right\}$

$\quad \dfrac{\pi}{2} - \left(-\dfrac{\pi}{2}\right)$

$l = 5\pi$ br

Örnek: $y=\frac{2}{3}x^{3/2}$ $0 \leq x \leq 3$ eğri parçasının uzunluğunu hesaplayalım.

$l = \int_0^3 \sqrt{1+(y')^2}\, dx$

$y' = x^{1/2}$

$(y')^2 = x$

$\sqrt{(y')^2+1} = \sqrt{1+x}$

$\int_0^3 \sqrt{1+x}\, dx$

$1+x = u^2$

$\Rightarrow dx = 2u\, du$

$\Rightarrow 2\int_1^2 u^2\, du$

$\dfrac{2u^3}{3}\Big|_1^2$

$\dfrac{16}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{14}{3}$ br

Örnek: $\begin{cases} x = t^2+3 \\ y = \frac{1}{3}t^3 \end{cases}$ $0 \leq t \leq 1$ eğri parçası uzunluğu.

$l = \int_0^1 \sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\, dt$

$(x't) = 2t$

$(y't) = t^2$

$(x't)^2 = 4t^2$

$(y't)^2 = t^4$

$\int_0^1 \sqrt{t^2(4+t^2)}\, dt$

$\int_0^1 t\sqrt{4+t^2}\, dt$

$4+t^2 = u$

$2t\, dt = du$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\int_2^{\sqrt{5}} \sqrt{u}\, du$

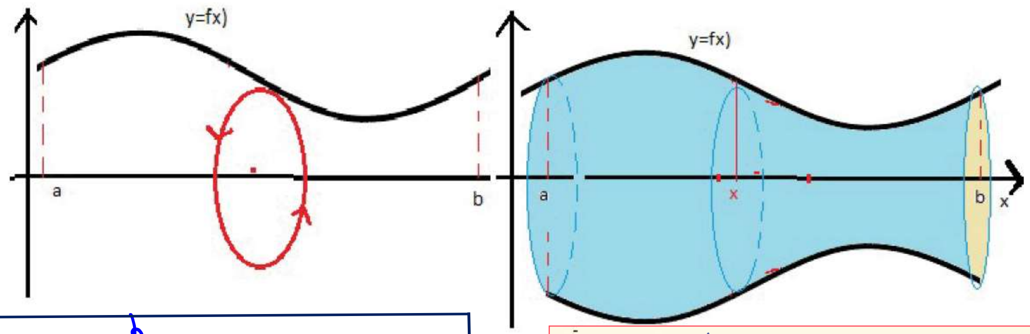
$\dfrac{u^{1/2+1}}{1/2+1}$

$\dfrac{\cancel{1}}{3} . u^{3/2}\Big|_2^{\sqrt{5}}$

$\dfrac{\cancel{1}}{3} 5^{3/4} - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ br

integral Uygulamaları

4) yüzey Alan Hesabı:



ox → $\ell=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$Ç=2\pi r$ → $2\pi\int_a^b |y|\sqrt{1+(y')^2}\,dx$

$r \to \underline{\underline{y}}$

oy → $r \to x$

$$S=2\pi\int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx \to ox$$

$$S=2\pi\int_c^d |f(y)|\sqrt{1+(f'(y))^2}\,dy \to oy$$

$a\leqslant x\leqslant b$, $c\leqslant y\leqslant d$

$\left.\begin{matrix} x=x(t) \\ y=y(t)\end{matrix}\right\}$ $t_1\leqslant t\leqslant t_2$

ox – ekseni $S=2\pi\int_{t_1}^{t_2} |y(t)|\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$

oy – ekseni $S=2\pi\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt$

Örnek: 5 br yarıçaplı $x^2+y^2=25$ çemberinin üst yarım parçasının ox-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyi alanı;

$y=\pm\sqrt{25-x^2}$

$S=2\pi\int_{-5}^{5} |\sqrt{25-x^2}|.\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$

$y'=\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{25-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$

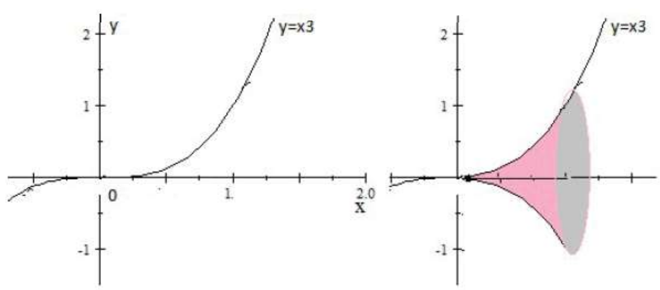
$1+(y')^2=\dfrac{x^2}{25-x^2}=\dfrac{25}{25-x^2}$

$\sqrt{1+(y')^2}=\dfrac{5}{\sqrt{25-x^2}}$

$S=10\pi\int_{-5}^{5}\cancel{\sqrt{25-x^2}}\dfrac{1}{\cancel{\sqrt{25-x^2}}}\,dx$

$S=10\pi x\Big|_{-5}^{5}$ $\quad 10\pi[5+5]=100\pi\cdot br$

Örnek: $y=x^3$, $0\leq x\leq 1$ eğri parçasının ox-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyi alanı;



$y=x^3$

$y'=3x^2$

$(y')^2=9x^4$

$(y')^2+1=1+9x^4$

$\sqrt{1+(y')^2}=\sqrt{1+9x^4}$

$S=2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,.dx$

$1+9x^4=t \Rightarrow dt=36x^3dx$

$S=\dfrac{2\pi}{36}\int_1^{10} t^{1/2}.\,dt \Rightarrow \dfrac{\pi}{27}\,t^{3/2}\Big|_1^{10}$

$S=\dfrac{\pi}{27}(10^{3/2}-1)\,br$

Örnek: $\left\{\begin{matrix} x= & 3t \\ y= & \frac{1}{2}t^2\end{matrix}\right.$ $0\leq t\leq 1$ eğri parçasının oy-ekseni etrafında döndürülmesiyle oluşan dönel yüzeyi

$\left.\begin{matrix} x'=3 \\ (x')^2=9 \\ (y')^2=t^2\end{matrix}\right\}$ oy → $S=2\pi\int_0^1 3t.\sqrt{9+t^2}\,dt$

ox → $S=2\pi\int_0^1 |\tfrac{1}{2}t^2|.\sqrt{9+t^2}\,dt$

$\sqrt{9+t^2}$

$9+t^2=u \Rightarrow 2tdt=du$ $\Big\}$ $3\pi\int_9^{10} u^{1/2}\,du=8\pi(10^{1/2}-3)\,br$

Seriler

*Tanım: a_k → dizisinin terimlerinin $k \in N^+$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k}$$

$$\boxed{\lim_{n \to \infty} S_n = S \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k = S}$$

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = p$

$p < \infty$ → yakınsak

$p = \infty$ → ıraksak

örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ $\quad \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1$ → kural

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$$

$1 = Ak + A + Bk$

$A + B = 0$

$A = 1$

$\Rightarrow B = -1$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1$$

şu halde kısmı toplamlar dizisi yakınsak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ serisi de yakınsaktır

örnek:

$\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right)$

→ formül: $\sum_{k=p}^{n} \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = \log\left(\frac{p}{n+1}\right)$ → sınav testse kullanabilirsin

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \log k - \log(k+1)$$

$$= (\underbrace{\log 1}_{0} - \cancel{\log 2}) + (\cancel{\log 2} - \cancel{\log 3}) + \cdots + (\cancel{\log n} - \log(n+1))$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} (-\log(n+1)) = \infty$$

şu halde kısmı toplamlar dizisi ıraksaktır. olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right)$ serisi de ıraksaktır

*Geometrik dizi:

$\sum_{k=1}^{\infty} a \cdot r^{k-1}$ $\quad r =$ esas

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a \cdot r^{k-1} = a(r^0 + r^1 + r^2 + \cdots + r^{n-1}) = a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)$$

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} a\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right):$$

$|r| < 1$ ✓

$|r| > 1$ ✗

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a\left(\frac{r^n-1}{r-1}\right)$$

$$\boxed{|r|<1 \quad \text{için} \quad \sum_{k=1}^{\infty} a\cdot r^{k-1} = a\left(\frac{1}{1-r}\right)}$$

Örnek: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k}}{5^{k-1}}$

1.yol $\Rightarrow$ $\displaystyle 5\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^k = \left(\frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

$$5\cdot\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{4}{5}}\right) = \frac{\frac{4}{\cancel{5}}}{\frac{1}{\cancel{5}}} = 4\cdot 5 = 20$$

2.yol $\Rightarrow$ $\displaystyle 5\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^k = \left(\frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$

$$= \cancel{5}\cdot\frac{4}{\cancel{5}}\left(1 + \frac{4}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{1-\frac{4}{5}}\right)$$

$$= 4\left(\frac{1}{\frac{1}{5}}\right) = 4\cdot 5 = 20$$

Örnek:

$$1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1} + \cdots = ?$$

$$= 1 + \left(\frac{2}{3}\right)\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}\right]$$

$$= 1 + \left(\frac{2}{3}\right)\left[\frac{4}{9} + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$$

$$= 1 + \frac{2}{3}\cdot\frac{4}{9}\left[1 + \left(\frac{4}{9}\right) + \left(\frac{4}{9}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right]$$

$$= 1 + \frac{8}{27}\left[\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\right]$$

$$= 1 + \frac{8}{27}\left[\frac{9}{5}\right]$$

$$= 1 + \frac{8}{15} = \frac{23}{15}$$

$$0{,}\overline{7} : 0{,}777\ldots = 0{,}7 + 0{,}07 + 0{,}007 + \cdots$$

$$= \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \cdots$$

$$= 7\left[\frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \cdots\right]$$

$$= 7\cdot\frac{1}{10}\left[1 + \frac{1}{10} + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \cdots\right]$$

$$= \frac{7}{10}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\right] \Rightarrow \frac{7}{\cancel{10}}\cdot\frac{\cancel{10}}{9} = \frac{7}{9}$$

*Notlar:

$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{5}\right)^k = 1+\left(\frac{-2}{5}\right)+\left(\frac{-2}{5}\right)^2+\dots = \left(\frac{1}{1-\left(\frac{-2}{5}\right)}\right) = 5/7$ dir. ((**Dikkat burada serinin $k=0$ dnan başladığına dikkat ediniz. Bu farklılık serinin yakınsaklığını değiştirmez ancak toplamını etkiler. Çünkü $\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a\left(\frac{1}{1-r}\right)$ eşitliğinin aslında sol tarafın "1" ile başlaması yani $1+r+r^2+\dots$ biçiminde olması durumunda doğru olduğuna dikkat ediniz. Aşağıdaki örnekler bu durumla ilgilidir.**))

Not. Dizilerin özellikleri düşünüldüğünde aşağıdaki özelliklerin ispatı kolayca yapılabilir. $\sum a_k$ ve $\sum b_k$ serileri yakınsak ve $\sum a_k = a$, $\sum b_k = b$ olsun. Bu durumda

(1) $\sum (a_k + b_k) = a + b$

(2) c bir reel sayı olmak üzere $\sum c.a_k = ca$

Teorem. $\sum a_k$ yakınsak bir seri ise $\lim_{n\to\infty} a_k = 0$ dır.

Bu önermenin aşağıda sonuç olarak verilen karşt tersi de doğrudur ve birçok serinin yakınsak yada ıraksaklığını belirlemede çok kullanışlıdır.

Sonuç. $\lim_{n\to\infty} a_k \neq 0$ ise $\sum a_k$ serisi ıraksaktır.

Örnekler.

$\sum 2^{1/n}$ ıraksak seridir çünkü $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1 \neq 0$ dır.

$\sum \frac{2+n}{3+5n}$ ıraksak seridir çünkü $\lim_{n\to\infty} \frac{2+n}{3+5n} = 1/5 \neq 0$ dır.

$\sum \frac{n^2}{1+n}$ ıraksak seridir çünkü $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{1+n} = \infty \neq 0$ dır.

$\sum \cos n$ ıraksak seridir çünkü $\lim_{n\to\infty} \cos n \neq 0$ dır.

Benzer şekilde $\sum (-1)^n$, $\sum n^n$, $\sum n!$, v.b serileri de ıraksaktır.

Uyarı. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ olması $\sum a_k$ serisinin yakınsak olmasını gerektirmez. Örneğin $\sum_{k=1}^{\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right)$ serisi için $\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \log\left(\frac{k}{k+1}\right) = 0$ fakat seri ıraksaktır.

2) Seriler Testi:

$k \geq 0 \Rightarrow a_k \geq 0$ ise $\sum a_k \to$ pozitif terimli seri denir

*Testler kuralları:

1) interal testi:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \longrightarrow [1,+\infty)$ sürekli

azalan $\Rightarrow a_k = f(x)$

$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ integral yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ serisi yakınsaktır

$\Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ 〃 ıraksaktır 〃 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 〃 ıraksaktır.

örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ serisi yakınsak mı? $\frac{1}{k^2+1} < \frac{1}{k^2} \to$ Azalan

$f(x) = \frac{1}{k^2+1}$ fonksiyonu $[1,+\infty)$ aralığında sürekli, azalan

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{k^2+1}\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{1}{k^2+1}\,dx = \arctan x \Big|_1^t$$

$$= \arctan t - \arctan 1$$

$$= \lim_{t\to\infty} \left(\arctan(\infty) - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$p < \infty \longrightarrow$ yakınsak

$p = \infty \longrightarrow$ ıraksak

$\frac{\pi}{4} < \infty \rightarrow$ old.dan seri integral testine göre yakınsaktır

<u>örnek:</u> $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k.\ln k}$ serisi yakınsak mı?

$f(x) = \frac{1}{x.\ln x}$ Fonksiyonu $[2, \infty)$ aralığında sürekli

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_2^t \frac{1}{x.\ln x} dx \quad \Rightarrow \ln x = u$$

$$\frac{1}{x} dx = du$$

$$\int_m^n \frac{1}{u} du = \ln|u|$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to \infty} \ln(\ln x)\Big|_2^t = \lim_{t \to \infty} (\ln(\ln t) - \ln(\ln 2))$$

$$= \infty \text{ ıraksaktır}$$

$p = \infty$ old.dan seri integral testine göre ıraksaktır.

$\ast$ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ p-testi $1 < p \rightarrow$ yakınsaktır

$p \leq 1 \longrightarrow$ ıraksaktır

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4/3}}$ $p = 4/3 > 1 \longrightarrow$ yakınsak

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$ $p = \frac{1}{2} < 1 \longrightarrow$ ıraksak

2) Limit Testi: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ $\lim_{k \to \infty} k^p . a_k = b$

1) $0 \leq b < +\infty$, $p > 1$ $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır (a_k'nın paydası payından 1 dereceden daha büyüktür)

2) $0 < b \leq \infty$, $p \leq 1$ $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ıraksaktır (a_k'nın pay ile payda derece farkı 1 den küçüktür)

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n . x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots b_0} = \begin{cases} m = n \Rightarrow \frac{a_n}{b_m} \\ n < m \Rightarrow 0 \\ m < n \Rightarrow \pm\infty \end{cases}$$

<u>örnek:</u> $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 3k + 1}{k^6 + 5}$

$p = 3$, $p = 3 > 1$ $b = 1$ old.dan seri limit testine göre yakınsaktır.

$$\lim_{k \to \infty} k^p . \frac{k^3 + 3k + 1}{k^6 + 5}$$

$$\frac{k^3(k^3 + 3k + 1)}{k^6 + 5} = \frac{k^6}{k^6} = 1 = b$$

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sqrt{3k+1}}{k+5}$ · $\lim_{k\to\infty} k^{p}\cdot\frac{\sqrt{3k+1}}{k+5}$ $p=\frac{1}{2}<1$, $b=\sqrt{3}$

old.dan seri limit testine göre ıraksaktır

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} k\cdot e^{-k}$ $\lim_{k\to\infty} k^{p}\cdot k\cdot e^{-k}$ $p=1$, $\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{e^k}=\frac{\infty}{\infty}$ belirsizlik

1. l'Hospital $\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{e^k}$

2. l'Hospital $\lim_{k\to\infty}\frac{2}{e^k}=0$

$p=1\leqslant 1$, $b=0$ old.dan seri limit testine göre uymamaktadır

3) Karışılaştırma Testi:

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ $k\in N$ için $a_k\leqslant b_k$

1) $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ yakınsak ise $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ yakınsaktır.

2) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ıraksak ise $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ıraksaktır

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$ $\sin^2 k\leqslant 1$

$\frac{\sin^2 k}{k(k+1)}\leqslant\frac{1}{k(k+1)}$ $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

old.dan seri integral testine göre yakınsaktır

bk yakınsak ise ak yakınsaktır old.dan $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin^2 k}{k(k+1)}$ karışılaştırma testine göre yakınsaktır

Örnek: $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{k^2-1}}$ $\sqrt[5]{k^2-1}<\sqrt[5]{k^2}$

$\frac{1}{\sqrt[5]{k^2-1}}>\frac{1}{\sqrt[5]{k^2}}$ $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{k^2}}$ $p=\frac{2}{5}<1$ ıraksaktır p-testine göre

$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[5]{k^2-1}}$ ıraksaktır

4) Oran Testi: $\sum a_k$ $\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$

1) $r<1$ ise $\sum a_k$ yakınsaktır

2) $r>1$ ise $\sum a_k$ ıraksaktır

3) $r=1$ ise $\sum a_k$ Test sonuç vermez.

5) kök testi: $\sum a_k$, $\lim_{k\to\infty}\sqrt[n]{a_k}=r$

1) $r<1$ ise $\sum a_k$ yakınsaktır

2) $r>1$ ise $\sum a_k$ ıraksaktır

3) $r=1$ ise $\sum a_k$ Test sonuç vermez.

örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{2^{k+1}} \cdot \cancel{(k)!}}{\cancel{(k+1)!} \cdot \cancel{2^k}} = \frac{2}{k+1} = 0 < 1$

old. dan seri oran testine göre yakınsaktır

$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{c_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sqrt[k]{2^k}}{k!} = \frac{2}{\sqrt[k]{k!}} = 0 < 1$

old. dan seri kök testine göre yakınsaktır

Örnek. $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{k}+\frac{2}{3}\right)^{k}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{k}\right)^{k}$, serileri için kök testi uygulanabilir.

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$ için; $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k} = e > 1$ olduğundan seri ıraksak · $e \simeq 2,7$

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{k}+\frac{2}{3}\right)^{k}$ için; $\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left(\frac{5}{k}+\frac{2}{3}\right)^{k}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{5}{k}+\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3} < 1$ olduğundan seri yakınsak

$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{k}\right)^{k}$ için;...yakınsak

Örnek. $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}$ serisinin karakterini araştıralım. Oran testinden

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{1/(k+1)!}{1/k!} = \lim_{k\to\infty}\frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1} = 0 < 1$$

olduğundan seri yakınsaktır.

Örnek. $\sum n\left(\frac{3}{n}\right)^n$ karakteri? Oran testinden

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{n}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{3}{n+1}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{3}{n}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = 0.\frac{1}{e} = 0 < 1$$

olduğundan yakınsaktır.

Veya kök testi ile $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n\left(\frac{3}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{3}{n}\right)^n} = 1.\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n} = 0 < 1$ olduğundan seri yakınsaktır.

6) Alterne Seriler:

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$ → işaret değiştiren Alterne seriler denir.

$1-1+1-1+1-1+\ldots$

1) Lebnitz testi: $k \geq 0$

1) $0 \leq a_{k+1} < a_k \Rightarrow$ $k < k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ a_k azalan

2) $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

örnek: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k}$

1) $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k}$ ✓ Azalan

2) $\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$ ✓

old. dan seri Alterne seri Lebnitz testine göre yakınsaktır.

Örnek. $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{2k+1}{5k-1}$ serisi için ise $\lim_{k\to\infty}a_k = \lim_{k\to\infty}\frac{2k+3}{5k-4} = \frac{2}{5} \neq 0$ olduğundan seri ıraksaktır.

2) $\sum |a_k|$ yakınsak ise $\sum a_k$ serisi mutlak yakınsaktır denir

3) $\sum a_k$ yakınsak ve $\sum |a_k|$ ıraksak ise $\sum a_k$ serisi şartlı yakınsaktır denir

Mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.

Örnek. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ serisi yakınsak, fakat $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^k}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ serisi ıraksak olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ serisi şartlı yakınsaktır.

Örnek. $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!}$ serisini ele alalım. $\sum_{k=0}^{\infty} \left|(-1)^k \frac{2^k}{k!}\right| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ serisinin yakınsak olduğu oran testi yardımıyla kolayca görülebilir. Şu halde $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!}$ serisi mutlak yakınsak ve dolaysıyla da yakınsaktır.

7) Kuvvet serileri:

$a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ için $c_k \in \mathbb{R}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots c_n(x-a)^n$$

Örnek: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^k (x-1)^k = (x-1) + 2^2(x-1)^2 + 3^3(x-1)^3 + \cdots$$

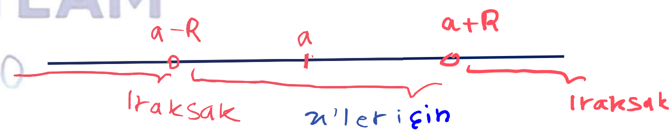
$n \in \mathbb{N}$, $k > n$, $c_k = 0$ ise kuvvet serisi bir polinomdur

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots c_n(x-a)^n$$

R yakınsaklık yarıçapı

$|x-a| < R \Rightarrow -R < x-a < R$

$a-R < x < a+R$



Uçlar Noktalar: $a-R$, $a+R$ } Acaba yakınsak mı?

$\sum c_k \cdot (x-a)^k$, $|x-a| < R \rightarrow$ yakınsaklık yarıçapı

#. $\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$ veya $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L$

1) $L \neq 0$ ise $R = \frac{1}{L}$'dir $\Rightarrow |x-a| < R$ yakınsak

2) $L = 0$ ise $R = \frac{1}{L} = \infty \Rightarrow \forall x$ için yakınsak

3) $L = \infty$ ise $R = \frac{1}{L} = 0 \Rightarrow x = a$ noktalarında yakınsak

Örnek: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \Rightarrow c_k = \frac{1}{k!}$

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{c_{k+1}}{c_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k!}}{(k+1)\cancel{(k)!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0, \; L = 0$$

$L = 0 \Rightarrow R = \infty$ o halde seri her x için yakınsaktır

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} k^k (x-1)^k$, $C_k = k^k$, $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{C_k} = \lim_{k\to\infty} k = \infty$

$L=\infty \Rightarrow R=0 \Rightarrow x=1$ noktasında seri yakınsaktır

Örnek: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k}$

$C_k = \frac{1}{k} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \left|\frac{C_{k+1}}{C_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} = 1$

$L=1\neq 0 \Rightarrow R=\frac{1}{L}=1$ yakınsaklık yarıçapı

$|x-a|<R$

$|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1$

$1<x<3$

$(1,3)$ aralığında seri yakınsaktır

Acaba $x=1$, $x=3$ yakınsak mı?

$x=1$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \longrightarrow$ Alterne serisi

Alterne serisi: 1) $\frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} \Rightarrow \frac{1}{k}$ Azalandır

2) $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0 \Rightarrow$ o halde Alterne seri Leibnitz testine göre yakınsaktır o zaman $x=1$ kapalıdır

$x=3$ için $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3-2)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ $\quad p=1$

$p\leq 1 \longrightarrow$ ıraksaktır

$1\leq 1$ 'dir ıraksaktır p testine göre, o halde serinin

yakınsaklık Aralığı $[1,3)$